# Первая Студенческая Универсиада по эконометрике
# МГУ имени М. В. Ломоносова

6 – 8 апреля 2012, Москва

## Задания 1-го тура

### Задача 1

Рассматривается задача статистической оценки (по наблюдениям $y_1, y_2, \ldots, y_n$) неизвестного параметра $\theta$ в модели

$$y_i = \theta + \theta\,\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ подчиняются (0; 1)-нормальному распределению и взаимнонезависимы.

1. *Являются ли остатки модели* (1) *гомоскедастичными?*
2. *Выведите МНК-оценку параметра* $\theta$. *Является ли она наилучшей в классе линейных несмещенных оценок?*
3. *Выведите распределение МНК-оценки параметра* $\theta$.
4. *Существует ли оценка параметра* $\theta$, *превосходящая по эффективности (хотя бы в асимптотическом по* $n \to \infty$ *смысле) МНК-оценку? Если «нет», то почему, если «да», то объясните почему и выведите вид этой оценки. Что можно сказать о распределении предложенной Вами оценки?*

### Задача 2

Рассматривается задача статистической оценки параметров $\theta_0$ и $\theta_1$ в модели

$$y_i = \theta_0 + \theta_1\, x_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

по наблюдениям

$$\{x_i;\, y_i\}, \quad i = 1, \ldots, n_1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2, \tag{2}$$

где

$$x_i = \begin{cases} x^{(1)} & \text{при } i = 1, 2, \ldots, n_1; \\ x^{(2)} & \text{при } i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2, \end{cases} \tag{2'}$$

а остатки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ подчиняются (0; $\sigma^2$)-нормальному распределению и взаимнонезависимы (величина $\sigma^2$ не известна).

1. *Будет ли прямая, проходящая через точки* $(x^{(1)}; \bar{y}^{(1)})$ *и* $(x^{(2)}; \bar{y}^{(2)})$, *где* $\bar{y}^{(1)} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} y_i$ *и* $\bar{y}^{(2)} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n_2} y_i$, *состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой для линии регрессии* $y$ *по* $x$ *? Если «да», «нет», то почему?*
2. *К наблюдениям* (2) – (2′) *добавлено еще k-2 групп наблюдений* $(k \geq 3)$:

   $(x^{(j)}; y_i),\quad i = n_1 + \dots + n_{j-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{j-1} + n_j, \quad j = 3, \dots, k$

   *однако исследователю известны лишь агрегированные данные вида*

   $$(x^{(1)}; \bar{y}^{(1)}), (x^{(2)}; \bar{y}^{(2)}), \dots, (x^{(k)}; \bar{y}^{(k)}) \qquad (3)$$

   *Требуется описать и обосновать процедуру построения наилучших* (*линейных по* $y_1, \dots, y_n$) *оценок для параметров* $\theta_0$ и $\theta_1$ *по наблюдениям* (3).

**Задача 3**

Рассматривается проблема так называемого *дистанционного экспресс-анализа* финансово-экономического состояния банка, а именно, **задача построения и оценки показателя надежности банка на базе значений ограниченного числа его наиболее информативных балансовых показателей**.

Специальный анализ показал, что к таким балансовым переменным могут быть отнесены: $x^{(1)}$ — *доля суммы пассивов в валюте баланса банка*; $x^{(2)}$ — *доля кредитов экономике в сумме работающих активов* и $x^{(3)}$ — *отношение балансовой прибыли к балансовым убыткам*.

С целью информационного обеспечения решения этой задачи проведено обследование 500 наиболее крупных (по сумме пассивов и величине капитала) банков, в результате которого были получены следующие данные:

$$(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, 500, \qquad (*)$$

где $y_i = 1$, если $i$-й банк отнесен к категории проблемных, и $y_i = 0$, если $i$-й банк отнесен к категории надежных.

1. *Предложите метод (модель), с помощью которого можно ввести и оценить по значениям* $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ *показатель надежности банка.*
2. *Подробно опишите процедуру эконометрического анализа предложенной Вами модели на основании исходных данных вида* $(*)$ *в частности:*

   *описать функцию правдоподобия имеющихся в Вашем распоряжении наблюдений* $(*)$ *в рамках выбранной Вами модели, дать обоснование предложенного вида функции;*

   *пояснить в результате решения какой оптимизационной задачи будут получены оценки параметров Вашей модели?*

**Задача 4**

По результатам $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 58$, обследования 58-ми однотипных предприятий проведен статистический анализ производственной функции Кобба-Дугласа

$$y_i = \theta_0 (x_i^{(1)})^{\theta_1} (x_i^{(2)})^{\theta_2} e^{\varepsilon_i},$$

описывающей зависимость объема выпуска продукции $(y_i)$ от основных факторов производства: капитала $(x_i^{(1)})$ и труда $(x_i^{(2)})$, в предположении постоянства отдачи от масштаба производства, т.е. при гипотетичном условии

$$\theta_1 + \theta_2 = 1 \tag{1}$$

(случайные остатки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{58}$ предполагаются статистически независимыми и одинаково $(0, \sigma^2)$-нормально распределенными).

Применение МНК к прологарифмированной модели

$$\ln y_i = \theta_0^{'} + \theta_1 \ln x_i^{(1)} + \theta_2 \ln x_i^{(2)} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 58 \tag{2}$$

$(\theta_0^{'} = \ln \theta_0)$ с учетом ограничения (1) дало, в частности, следующие результаты: $\theta_0^{'} = 3,21; \hat{\theta}_1 = 0,63; \hat{\theta}_2 = 0,37$.

1. *Пояснить (на экономически содержательном уровне), что означает «постоянство отдачи от масштаба».*
2. *Вывести формулы для вычисления МНК-оценок параметров* $\theta_0^{'}, \theta_1$ и $\theta_2$ *в уравнении* (2) ***с учетом ограничения*** **(1)**.
3. *Описать процедуру проверки гипотезы (1) по наблюдениям* $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 58$.
4. *Проанализировать эластичности объема выпуска* $y$ *по капиталу* $x^{(1)} \left(Э_{y.x^{(1)}}\right)$ *и по труду* $x^{(2)} \left(Э_{y.x^{(2)}}\right)$. *Какие выводы о приоритетных направлениях инвестирования в производство позволяет сделать этот анализ?*

**Задача 5**

Анализируемый временной ряд определяется соотношением:

$$x(t) = x(t-1) - 0,5x(t-2) + \delta(t), \tag{1}$$

в котором остатки $\delta(1), \delta(2), \ldots$ — взаимнонекоррелированы, имеют нулевые средние значения и постоянные дисперсии $D\delta(t) = \sigma_0^2)$, не зависящие от $t$.

1. *Проверить стационарность ряда (1).*
2. *Вычислить значения автокорреляционной функции (а.к.ф.)* $r(k) = corr(x(t), \ x(t+k))$ *для* $k = 0, 1, 2, 3$.
3. *Определить значение частной а.к.ф.* $pr(2) = corr(x(t), x(t+2) \mid x(t+1))$.

*Чем модель (1) отличается от моделей ARIMA (2; 1; 0), ARIMA (2; 0; 0) и ARIMA (1; 0; 0), где ARIMA (p; k; q) — это модель авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего с параметрами p (порядок авторегрессии), k (порядок интегрирования модели) и q (порядок скользящего среднего в остатках).*