МГУ имени М.В. Ломоносова

Шестая международная универсиада по эконометрике

Задание № 1 (15 баллов)

Рассматривается модель парной регрессии

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad cov(x_i; \varepsilon_i) \neq 0, \ i = 1, \dots, n.$$

Пусть z_i - бинарная инструментальная переменная.

Покажите, что оценка, полученная методом инструментальных переменных, в данном случае будет иметь вид $\hat{\beta}_i^{IV} = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_0}}{\overline{x_1} - \overline{x_0}}$, где $\overline{y_1}$ – среднее значение переменной y при условии $z = 1$, то есть:

$$\overline{y_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot I_{(z_i=1)}}{\sum_{i=1}^{n} I_{(z_i=1)}}, \text{где } I_{(z_i=1)} = \begin{cases} 1, \text{если } z_i = 1 \\ 0, \text{если } z_i = 0 \end{cases}$$

Обозначения для $\overline{y_0}, \overline{x_1}$ и $\overline{x_0}$ аналогичны.

Решение:

Пусть $z = 1$ в k случаев из n (в первых), то есть для $i = 1,2 \dots k$, где $k < n$

Первый шаг:

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 * z_i + u_i$$

$$\widehat{x_i} = \widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1} * z_i$$

Тогда $\widehat{\alpha_0} = \overline{x_0}$, а $\widehat{\alpha_1} = \overline{x_1} - \overline{x_0}$,

где $\overline{x_0} = \sum_{i=k+1}^{n} x_i$ а $\overline{x_1} = \sum_{i=1}^{k} x_i$

Второй шаг:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 * \widehat{x_i} + \varepsilon_i$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\widehat{cov}(y; \hat{x})}{\hat{V}(\hat{x})} = \frac{\widehat{cov}(y; \widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1} * z)}{\hat{V}(\widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1} * z)} = \frac{\widehat{\alpha_1}\, \widehat{cov}(y; z)}{\widehat{\alpha_1}^2\, \hat{V}(z)} = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} y_i z_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} z_i)}{(\overline{x_1} - \overline{x_0}) \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2} = \frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i - \left(\sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=k+1}^{n} y_i\right)}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\overline{yz} - \bar{y}\bar{z}}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})(\overline{z^2} - (\bar{z})^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})\hat{V}(z)} = \frac{\frac{n\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=1}^{n} y_i}{n^2}}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})\hat{V}(z)} =$$

$$= \frac{\frac{n\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{n^2}}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})\hat{V}(z)} = \frac{\frac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{n^2}}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})\hat{V}(z)} =$$

$$\frac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} y_i - k\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})(n-k)k} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{k} - \frac{\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{n-k}}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})}$$

Следовательно, поскольку

$$\overline{y_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i I(z_i = 1)}{\sum_{i=1}^{n} I(z_i = 1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{k}$$

$$\boldsymbol{\widehat{\beta_1} = \frac{(\overline{y_1} - \overline{y_0})}{(\overline{x_1} - \overline{x_0})}}$$

Задание №2 (25 баллов)

Рассматривается модель: $Y_i = \theta_1 + \theta_2 X_i + u_i$, где x_i – стохастический эндогенный регрессор.

В распоряжении исследователя помимо данных о переменных X и Y есть данные о ещё двух переменных P и Q таких, что $cov(X_i, P_i) \neq 0$, $cov(X_i, Q_i) \neq 0$, $cov(u_i, P_i) = 0$, $cov(u_i, Q_i) = 0$.

(2.1) Докажите, что оценка двухшагового МНК для параметра θ_2, использующая переменные P и Q в качестве инструментов, будет состоятельной. Если вам требуются какие-либо дополнительные предпосылки, то сформулируйте их.

(2.2) Пусть ваша выборка состоит из 1000 наблюдений, причем вы располагаете данными о средних выборочных значениях переменных:

$$\bar{Y} = \bar{X} = \bar{P} = 0, \qquad \bar{Q} = \overline{PQ} = \overline{XQ} = \overline{P^2} = \overline{YQ} = 1, \qquad \overline{Q^2} = 1.5, \qquad \overline{XP} = \overline{YP} = 2$$

Вычислите состоятельную оценку параметра θ_2 из предыдущего пункта.

Решение:

1. Регрессия первого шага:

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 * P_i + \alpha_2 * Q_i + \varepsilon_i$$

Регрессия второго шага:

$$y_i = \theta_1 + \theta_2 * \widehat{x_i} + u_i$$

Тогда:

$$\widehat{\theta_2^{OLS}} = \frac{\widehat{cov}(y;\hat{x})}{\hat{V}(\hat{x})} = \frac{\widehat{cov}(\theta_1 + \theta_2 * \hat{x} + u;\hat{x})}{\hat{V}(\hat{x})} =$$

$$= \theta_2 + \frac{\widehat{cov}(u;\hat{x})}{\hat{V}(\hat{x})} \to \theta_2 + \frac{cov(u_i;\widehat{x_i})}{V(\widehat{x_i})}$$

Рассмотрим теперь $cov(u_i;\widehat{x_i}) = cov(\widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1} * P_i + \widehat{\alpha_2} * Q_i;\ u_i) = \widehat{\alpha_1}\, cov(P_i;u_i) + \widehat{\alpha_2}\, cov(Q_i;\ u_i)$

По условию $cov(P_i;u_i) = \ cov(Q_i;\ u_i) = 0$, поэтому

$\widehat{\theta_2^{OLS}} \to \theta_2$, следовательно, оценка состоятельная.

Необходимо, чтобы $cov(P_i;\varepsilon_i) = \ cov(Q_i;\ \varepsilon_i) = 0$

2.2

$$\hat{X} = Z\hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}Z'X$$

Причем:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & P_1 & Q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_n & Q_n \end{bmatrix}$$

Тогда:

$$(Z'Z) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ P_1 & \dots & P_n \\ Q_1 & \dots & Q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P_1 & Q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_n & Q_n \end{bmatrix} = 1000 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$(Z'Z)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \dots\dots. = \frac{1}{1000}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(Z'X) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ P_1 & \dots & P_n \\ Q_1 & \dots & Q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 1000 * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(Z'Z)^{-1}Z'X = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\theta_2} = \frac{\widehat{cov}(y;\hat{x})}{\hat{V}(\hat{x})} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i(\widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1} * P_i + \widehat{\alpha_2} * Q_i) - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1} * P_i + \widehat{\alpha_2} * Q_i}{\hat{V}(\hat{x})}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^n y_i(-2 + 2Q_i) - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n -2 + 2Q_i}{\hat{V}(\hat{x})}$$
$$= \frac{1/1000(-2\sum_{i=1}^n y_i + 2\sum_{i=1}^n y_i\, Q_i + 1000 * 2\sum_{i=1}^n y_i - 2\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n Q_i)}{\hat{V}(\hat{x})}$$
$$= \frac{0 + 2 + 0}{2} = 1$$

$$\boldsymbol{\widehat{\theta_2} = 1}$$

Задание №3 (20 баллов)

Макс и Нюша хотят оценить три неизвестные константы, каждую из которых они измеряют независимо, однократно и с ошибкой, имеющей стандартное нормальное распределение:

$$x_i = \mu_i + \varepsilon_i, \qquad \text{где } \varepsilon_i \sim N(0,1), i = 1, 2, 3.$$

Для сравнения различных векторных оценок Макс и Нюша хотят использовать общую величину риска:

$$R = E[(\widehat{\mu_1} - \mu_1)^2 + (\widehat{\mu_2} - \mu_2)^2 + (\widehat{\mu_3} - \mu_3)^2]$$

Макс решил использовать вектор-столбец $\hat{\mu}^{ML}$ оценок максимального правдоподобия. Нюша любит Макса, но также очень любит число ноль, поэтому придумала *«метод нюшиного правдоподобия»* и использует оценку:

$$\hat{\mu}^N = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)\,\hat{\mu}^{ML}, \qquad \text{где } \alpha = (X^TX)^{-1} \text{ и } X = (x_1, x_2, x_3)^T$$

(3.1) Несут ли величины x_2 и x_3 информацию о параметре μ_1?
(3.2) Какие оценки получит Макс?
(3.3) Чему будет равна общая величина риска для оценок Макса?
(3.4) Какую формулу использует Нюша для оценки μ_1?
(3.5) У кого общая величина риска будет меньше: у Макса или у Нюши?

Замечание:
Без доказательства можно пользоваться соотношением: $E(X-\mu)^T(\alpha X) = E(\alpha X)^T(\alpha X)$

Ответы и решения:

(3.1) нет

(3.2) $\mu_i = x_i$

(3.3) $R^{ML} = 3$

(3.4) $\widehat{\mu_1} = \left(1 - \frac{1}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}\right) \cdot X_1$

(3.5) У Нюши.

$$\hat{\mu}^N = \alpha \cdot 0 \ + (1-\alpha)\, X = X - g(X)$$

$$R^N = E[(X - g(X) - \mu)^T (X - g(X) - \mu)]$$
$$= E[(X-\mu)^T (X-\mu)] + E(g(X)^T g(X) - 2E[(X-\mu)^T g(X)]$$

Замечаем, что $E[(X-\mu)^T (X-\mu)] = 3$

Из предложенной теоремы следует, что

$$E[(X-\mu)^T g(X)] = \sum_i E\left(\frac{\partial g_i(X)}{\partial X_i}\right) = E\big(g(X)^T g(X)\big)$$

Следовательно,

$$R^N = 3 + \ E\big(g(X)^T g(X)\big) - 2E\big(g(X)^T g(X)\big) = 3 - E\big(g(X)^T g(X)\big) < 3$$

Задание №4 (20 баллов)

Рассматривается модель на панельных данных: $y_{it} = \theta x_{it} + \mu_i + u_{it}$, i=1,…,10000, t=1,2.

Здесь u_{it} — независимые одинаково нормально распределенные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной σ^2, μ_i — индивидуальные фиксированные эффекты (ненаблюдаемая переменная), x_{it} – детерминированная скалярная переменная.

Исследователь оценивает параметр θ при помощи модели в первых разностях, то есть использует регрессию для переменных $y_{i2} - y_{i1}$ и $x_{i2} - x_{i1}$.

(4.1) Выведите формулу оценки параметра. Вычислите дисперсию оценки (выразите её через x_{it} и σ^2)

(4.2) Предложите формулу для 95-процентной интервальной оценки коэффициента θ. Ответ обоснуйте

Решение:

(4.1) Для решения следует перейти к преобразованной модели:

$$\Delta Y_i = \theta \Delta X_i + \Delta u_i \quad (1)$$

Оценка:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i \Delta Y_i}{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2}$$

Дисперсия оценки:

$$\frac{var\ (\Delta u_i)}{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2} = \frac{2\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_{i2} - X_{i1})^2}$$

(4.2) Оценка дисперсии

$$se(\hat{\theta})^2 = \frac{\widehat{var\ (\Delta u_i)}}{\sum_{i=1}^{n} (X_{i2} - X_{i1})^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-1}}{\sum_{i=1}^{n} (X_{i2} - X_{i1})^2}$$

$e_i = \Delta Y_i - \hat{\theta}\, \Delta X_i$ -остатки, полученные в ходе МНК-оценивания уравнения (1)

Доверительный интервал: $(\hat{\theta} - 1{,}96 * se(\hat{\theta}),\ \hat{\theta} + 1{,}96 * se(\hat{\theta}))$

Задание №5 (10 баллов)

Существует ли стационарный ARMA-процесс, который характеризуется следующими свойствами: коэффициент автокорреляции первого порядка равен 1/2, второго порядка равен 1/3, а третьего и всех последующих порядков — нулю? Ответ обоснуйте

Решение:

Процесс существует, и для обоснования достаточно привести пример. Поведение автокорреляционной функции подсказывает, что речь идет о MA(2) процессе. Его параметры можно получить, решив соответствующую систему или угадав.

Например: $Y_t = 0{,}5 \cdot U_{t-1} + 0{,}5 \cdot U_{t-2} + U_t$

Задача №6 (25 баллов)

Дан временной ряд $y_0, y_1, \cdots, y_{50}$, который описывается авторегрессионным уравнением

$y_t = c + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t,$ где $y_0 = 0,\ \varepsilon_t -$ гауссовский белый шум $\left(\varepsilon_t \sim i.i.d.\, N(0;\sigma^2)\right)$

При помощи стандартного МНК были оценены коэффициенты уравнения $\hat{\theta}$ и $\hat{c}$, посчитаны прогнозные значения $\widehat{y_1} = 0.6, \widehat{y_{22}} = 1, \widehat{y_{24}} = 1.4125.$ Коэффициент детерминации в оценённой регрессии составил 0,48.

Значения характеристик разброса ряда $\{y_t\}$ для трёх временных промежутков составляют:

$$\sum_{t=1}^{49}\left(y_t - \frac{1}{49}\sum_{t=1}^{49} y_t\right)^2 = 2.03, \sum_{t=2}^{50}\left(y_t - \frac{1}{49}\sum_{t=2}^{50} y_t\right)^2 = 1.95, \sum_{t=1}^{50}\left(y_t - \frac{1}{50}\sum_{t=1}^{50} y_t\right)^2 = 1.99$$

Согласно тесту Дики-Фуллера гипотеза о наличии единичного корня оказалась отклонённой на уровне значимости 1% (критическое значение равно -3.75), но была принята на уровне значимости 5% (критическое значение равно -2.93).

(6.1) Определите оценки параметров $\hat{\theta}$ и $\hat{c}$, вычисленные при помощи обычного метода наименьших квадратов.

(6.2) Можно ли полученные оценки использовать при построении доверительных интервалов для коэффициентов регрессии? Дайте необходимые пояснения.

Решение:

1. t- статистика для проверки гипотезы о наличии единичного коря определяется следующим образом:

$$\hat{r} = \frac{\hat{\theta} - 1}{se(\hat{\theta})}$$

Гипотеза о наличии единичного корня не выполняется на уровне 1%, если

$$\frac{\hat{\theta} - 1}{se(\hat{\theta})} > -3{,}75$$

Гипотеза о наличии единичного коря выполняется на уровне 5%, если

$$\frac{\hat{\theta} - 1}{se(\hat{\theta})} < -2{,}93$$

Следовательно:

$$-3{,}75 < \frac{\hat{\theta} - 1}{se(\hat{\theta})} < -2{,}93 \rightarrow -3{,}75 \times se\left(\hat{\theta}\right) + 1 < \hat{\theta} < -2{,}93 \times se(\hat{\theta}) + 1$$

$$-3{,}75 < \frac{\hat{\theta} - 1}{se\left(\hat{\theta}\right)} < -2{,}93$$

$$-3{,}75 * se\left(\hat{\theta}\right) + 1 < \hat{\theta} < -2{,}93 * se\left(\hat{\theta}\right) + 1$$

Определим остаточную сумму квадратов и стандартную ошибку коэффициента регрессии, исходя из дисперсии подвыборок и коэффициента детерминации

Наблюдений для построения МНК оценки у нас 50-1=49.

$y_2, \ldots, y_{50}$ -зависимая переменная

$y_1, \ldots, y_{49}$ -независимая переменная

Найдем $se\left(\hat{\theta}\right)$:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{50} e_t^2}{\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{50}(y_i - \overline{y})}$$

Наблюдений для построения МНК оценки у нас 50-1=49.

$$0{,}48 = 1 - \frac{\frac{1}{48}\sum_{t=2}^{50} e_t^2}{\frac{1}{48} * 100}$$

Определим остаточную сумму квадратов оценки

$$\sum_{t=2}^{50} e_t^2 = (1 - 0{,}48) * 1{,}95 = 1{,}014$$

Определим

$$s^2 = \frac{\sum_{t=2}^{50} e_t^2}{n-k} = \frac{1{,}014}{49-2} = \frac{1{,}014}{47}$$

$$se(b) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{50} e_t^2 * \frac{n}{n-2}}{n * var(y_{t-1})}} = \sqrt{\frac{s^2}{\sum_{t=2}^{49}(y_i - \overline{y})}} = \sqrt{\frac{\frac{1{,}014}{47}}{2{,}03}} = 0{,}103$$

Вычислим интервал, в котором лежит $\hat{\theta}$

$$-3{,}75 * 0{,}103 + 1 < \hat{\theta} < -2{,}93 * 0{,}103 + 1$$

$$0{,}613 < \hat{\theta} < 0{,}697$$

Найдем оценки параметров модели исходя из представленных в условии оцененных значений y для различных периодов

$$y_o = 0$$

$$\widehat{y_1} = \hat{c} = 0{,}6$$

Составим и решим систему уравнений

$$\widehat{y_{24}} = \hat{c} + \hat{\theta} * (\hat{c} + \hat{\theta} * y_{22}) = \hat{c} + \hat{c} * \hat{\theta} + \hat{\theta}^2 * 1 = 1{,}415$$

$$1{,}4125 = 0{,}6 + 0{,}6 * \hat{\theta} + \hat{\theta}^2$$

$$0{,}6 * \hat{\theta} + \hat{\theta}^2 - 0{,}8125 = 0$$

$$\widehat{\theta_1} + \widehat{\theta_2} = 0{,}6$$

$$\widehat{\theta_1} * \widehat{\theta_2} = -0{,}8125$$

$$\widehat{\theta_1} = 0{,}65$$

$$\widehat{\theta_2} = -1{,}25$$

Проверим, какое из полученных значений попадает в заданный ранее интервал

$$-3{,}75 * 0{,}103 + 1 < 0{,}65 < -2{,}93 * 0{,}103 + 1$$

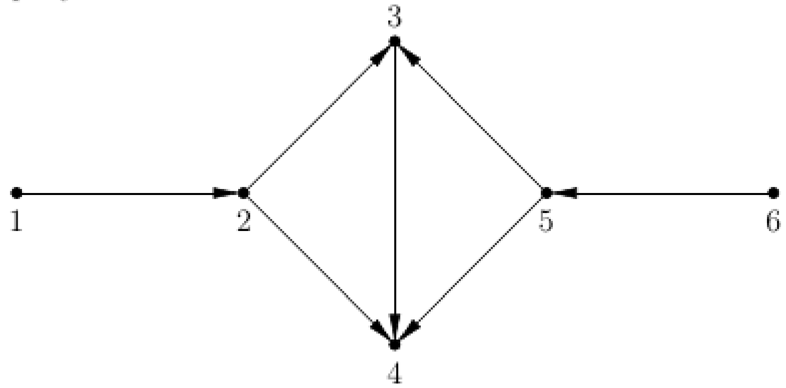
$$0{,}613 < 0{,}65 < 0{,}697$$

$$\hat{\theta} = 0{,}65$$

При тестировании нулевой гипотезы $\theta = 1$ t-отношение не имеет t – распределения. Распределение является асимметричным. Используя его, мы слишком часто отклоняем нулевую гипотезу.

Задание №7 (35 баллов)

В социальных науках любят изучать влияние людей друг на друга. Например, студенты одной группы, общаясь между собой в вопросах учёбы, могут влиять на успехи друг друга. Формально, это взаимодействие можно представить следующим образом. Рассмотрим группу из n студентов, представленную в виде графа на рисунке (n=6):



Каждая точка (вершина) – студент, а стрелочки (ребра) указывают, *кто на кого влияет* (предположим, что исследователь это точно знает). Структуру такого графа можно охарактеризовать при помощи *матрицы смежности* $W = [w_{ij}]$, такой что:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } j \to i, & i \neq j \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Например, для указанного графа матрица смежности будет выглядеть так:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

То есть единица в первом столбце матрицы означает, что на студента 2 влияет студент 1, а тот факт, что первая строка состоит только из нулей, означает, что на студента 1 не влияет никто. Назовем людей, которые влияют на студента номер i, его *друзьями*.

Будем рассматривать упрощённую модель:

$$y = \lambda W y + \beta x + \varepsilon, \ \varepsilon \sim N(0; I) \qquad (1)$$

где x и y – векторы размерности $n \times 1$ (x считается случайным и экзогенным), а $W - n \times n$ матрица. Здесь λ и $\beta -$ скаляры, y_i – успеваемость (например, средний балл) i-го студента, $x_i -$ значение объясняющей переменной, которая влияет на успеваемость i-го студента. Тогда i-ая компонента вектора Wy – это суммарная успеваемость друзей студента i. Коэффициент λ можно интерпретировать как *эндогенный эффект*: если суммарно средний балл всех друзей студента вырастет на 1, то средний балл самого студента вырастет на λ. Коэффициент β отражает *экзогенный эффект* и интерпретируется обычным образом.

Модель (1) можно записать в виде:

$$y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \beta x_i + \varepsilon_i, \ \ \varepsilon \sim N(0;1),$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(x_i \varepsilon_i) = E(x_i \varepsilon_j) = 0 \qquad (2)$$

или: $$y_i = \lambda z_i + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

$$\text{где } z_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j \qquad (3)$$

(7.1) Объясните, почему МНК-оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\beta}$ уравнения (3) не будут, вообще говоря, состоятельными. А если предположить, что $E(z_i\, x_i) = 0$? Указание: считайте, что закон больших чисел (ЗБЧ) выполняется для всех ниже указанных случаев:

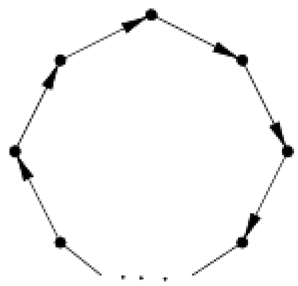
$$plim \frac{1}{n} \sum x_i^2 = E x_i^2, \qquad plim \frac{1}{n} \sum z_i^2 = E z_i^2, \qquad plim \frac{1}{n} \sum z_i x_i = E(z_i x_i)$$

$$plim \frac{1}{n} \sum x_i \varepsilon_i = E(x_i \varepsilon_i), \qquad plim \frac{1}{n} \sum z_i \varepsilon_i = E(z_i \varepsilon_i)$$

где $plim$ означает сходимость по вероятности.

(7.2) Предположим, что $\lambda \in (0, 1)$ известен. Как получить состоятельную оценку β?

В заданиях (3), (4) и (5) предполагаем, что студенты «зациклились», то есть влияют друг на друга, как изображено на следующем графе:



Тогда очевидно, что матрицу W можно представить в виде:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(7.3) Разумно ли предполагать в этом случае, что $E(z_i\, x_i) = 0$? ***Подсказка:*** посчитайте эту величину «в лоб»

(7.4) Чему равны $plim\,\hat{\lambda}$ и $plim\,\hat{\beta}$ (считаем, что как и в задании (1) для указанных последовательностей выполняется ЗБЧ).

(7.5) В какую сторону $plim\,\hat{\lambda}$ и $plim\,\hat{\beta}$ отличаются от λ и β соответственно? Интуитивно, почему так происходит? Считать, что $\lambda \in (0,1)$. ***Замечание:*** если вы не можете посчитать, но можете пояснить содержательно – пишите!

Решение:

1. Пусть $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, y_j = z_i$. Тогда: $y_j = \lambda z_i + \beta x_i + \varepsilon_i$. Очевидно, что z_i- эндогенный регрессор, так как, вообще говоря $\mathrm{E}(z_i \varepsilon_i) \neq 0$. Обозначим:

$$X = \begin{bmatrix} z_1 & x_1 \\ \cdots & \dots \\ z_n & x_n \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \end{bmatrix}$$

Тогда МНК оценки:

$$\hat{\gamma} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X'\gamma + \varepsilon) = \gamma + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Чтобы проверить состоятельность, перепишем это все через суммы:

$$\hat{\gamma} = \gamma + \frac{1}{\sum_i x_i^2 \sum_i z_i^2 - (\sum_i x_i\, z_i)^2} * \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 & -\left(\sum_i x_i\, z_i\right) \\ -\left(\sum_i x_i\, z_i\right) & \sum_i z_i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sum_i \varepsilon_i\, z_i \\ \sum_i \varepsilon_i\, x_i \end{bmatrix}$$

Домножив на $\frac{1}{n^2}$ числитель и знаменатель, получим:

$$\hat{\gamma} = \gamma + \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 \frac{1}{n}\sum_i z_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\, z_i\right)^2} * \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 & -\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\, z_i\right) \\ -\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\, z_i\right) & \frac{1}{n}\sum_i z_i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_i \varepsilon_i\, z_i \\ \frac{1}{n}\sum_i \varepsilon_i\, x_i \end{bmatrix}$$

Заметим, что применят ЗБЧ к некоторым из получившихся сумм нельзя, потому что (z_i, ε_i) не i.i.d, однако если предположить, что значения соответствующих пределов по вероятности такие же, как бы показал ЗБЧ (а это действительно так для многих сетей), имеем:

$$plim\, \hat{\gamma} = \gamma + \frac{1}{E(x_i^2)E(z_i^2) - \big(E(x_i)E(z_i)\big)^2} * \begin{bmatrix} E(x_i^2) & -E(x_i)E(z_i) \\ -E(x_i)E(z_i) & E(z_i^2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} E(z_i\varepsilon_i) \\ E(x_i\varepsilon_i) \end{bmatrix}$$

Из такого представления очевидно, что если $E(z_i\varepsilon_i) \neq 0$, то обе оценки в векторе $\hat{\gamma}$ не являются состоятельными. Однако, если предположить, что $E(z_i x_i) = 0$, то оценка $\hat{\beta}$ будет состоятельной!

2. Сделаем преобразование переменных: $\tilde{y} = (I - \lambda W)y$. Тогда для модели: $\check{y} = x\beta + \varepsilon$ выполнены все предпосылки модели Гаусса-Маркова, поэтому $\hat{\beta}_{OLS}$ будет состоятельной.

3. Нет, не разумно. В данном случае модель выглядит следующим образом:

$$y_i = \lambda y_{i+1} + \beta x_i + \varepsilon_i, \text{ если предположить, что } y_{n+1} = y_1$$

Тогда:

$$E(x_i z_i) = E(x_i y_{i+1}) = \frac{1}{\lambda} E(\lambda x_i y_{i+1}) = \frac{1}{\lambda} E\left(\left(y_i - \beta x_i - \varepsilon_i\right) x_i\right) = \frac{1}{\lambda} E\left((x_i y_i) - \beta\right)$$

Далее, учитывая, что $E(x_i \varepsilon_i) = E\left(x_i \varepsilon_j\right) = E\left(x_i x_j\right) = 0$:

$$E(x_i y_i) = E\left(x_i\left(\lambda y_{i+1} + \beta x_i + \varepsilon_i\right)\right) = \cdots = \lambda^n E(x_i y_i) + \beta$$

Откуда:

$$E(x_i y_i) = \frac{\beta}{1 - \lambda^n}$$

$$E(x_i z_i) = \frac{\beta \lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n}$$

4. Придётся посчитать все мат.ожидания (см. пункт 1). По аналогии с выше приведенным выводом получаем, что $E(\varepsilon_i z_i) = \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda^n}$, а также:

$$E(y_i^2) = \lambda^2 E(y_{i+1}^2) + \beta^2 E(x_i^2) + E(\varepsilon_i^2) + 2\lambda\beta\, E(y_{i+1} x_i) + 2\lambda\, E(y_{i+1}\varepsilon_i) + 2\beta\, E(x_i \varepsilon_i) =$$

$$= \lambda^2 E(y_i^2) + \beta^2 + 1 + 2\lambda\beta\, \frac{\beta\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n} + 2\lambda\, \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n}$$

Где второе равенство вытекает из симметрии и всех ранее сделанных предположений и расчетов. Тогда:

$$E(y_i^2) = \frac{1}{1 - \lambda^2} (\beta^2 + 1) \frac{1 + \lambda^n}{1 - \lambda^n}$$

Таким образом, используя формулы из пункта 1, а также подсказку о том, что все релевантные пределы по вероятности равны соответствующим мат.ожиданиям, получим:

$$plim\, \hat{\gamma} \to \gamma + \frac{1}{E(y_i^2) - \left(\frac{\beta\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n}\right)^2} * \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n} \\ -\frac{\beta\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n} & E(y_i^2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Но так как $\lambda < 1$, то второе слагаемое будет стремиться к 0, из чего следует, что предел по вероятности $\hat{\gamma}$ равен истинному значению γ.

5. В результате оценки, полученной в предыдущем пункте, мы можем утверждать, что для $\lambda \in (0; 1)$ оценка вектора $\hat{\gamma}$ является несмещённой. То есть и оценка параметра λ не смещена, и оценка параметра β тоже. Интуицию к этому результату мы предлагаем вам придумать самостоятельно.